Tocando la cuarta dimensión

por
Daniel Sierra Ruiz
(IES Zaurín, Ateca)

La idea de este taller parte de otro que impartió Covadonga Rodríguez-Moldes en las JAEM de Granada. Covadonga utilizaba cañas flexibles (de las de beber refrescos) para construir el hipercubo y los sólidos platónicos. Las cañas tienen que ser de las que tienen un fuelle que permite *doblarlas*. Otro tipo de cañas requieren cierta capacidad de visualizar el poliedro partiendo de su desarrollo plano. En este caso, se construyen las caras necesarias y se pegan con cinta adhesiva; este procedimiento permite que cualquier alumno, desde 1.º de ESO, construya cualquier sólido platónico, simplemente sabiendo el número y tipo de caras que tiene.

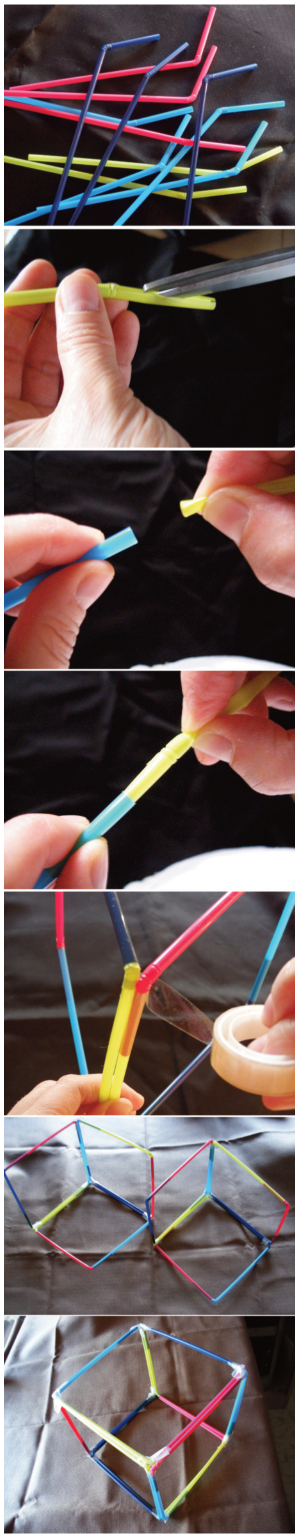

Figura 1

El proceso de construcción (véanse las imágenes de la figura 1), empieza con una cara, para lo cual tomo tantas cañas como lados tenga la cara. Como tengo cuatro colores, si hacemos triángulos o cuadrados podemos usar colores distintos para cada lado. Esto dará juego para otro tipo de *retos*. Para unir los lados, corto longitudinalmente las cañas en la parte más pequeña, justo hasta donde empieza el fuelle. Este corte nos permite introducir la parte corta de una caña en la larga de la otra y, repitendo el proceso, construir el polígono que busquemos. Una vez que tenemos todas las caras del poliedro, utilizamos cinta adhesiva para unirlas por sus vértices. Lo *feo* de esta construcción es que cada arista está compuesta por dos cañas. Sin embargo, si pedimos que esas dos cañas que forman una sola arista sean del mismo color, obligamos al alumnado a pensar cómo montar el poliedro. Como se ha dicho, de esta manera podemos construir cualquier sólido platónico en los primeros cursos de secundaria y en los últimos de primaria. Sin embargo, aquí utilizaremos este material para construir una representación del hipercubo en tres dimensiones.

El taller está pensado para 4.º de ESO y hay dos versiones. En la larga, se trata el concepto matemático de multidimensionalidad, eso sí, desde un punto de vista bastante intuitivo. En este artículo, hablaremos solo de la versión corta de la actividad. En ambos casos, para fundamentar el aspecto teórico se han utilizado como referencias los libros de Raúl Ibáñez y Rudy Rucker (ver referencias bibliográficas). Este último, así como los videos de *Dimensions* los considero regalos de Pedro Latorre. Por otra parte, cada vez que intentamos *saltar* a una dimensión superior a tres no podemos olvidar al cuadrado planilandés de Abbott.

El *objetivo* final del taller es construir un hipercubo, pero para llegar a él necesitamos que el alumnado asimile —o al menos que intuya— algunas cuestiones:

- Es posible representar un objeto tetradimensional en un espacio de tres dimensiones, al igual que somos capaces de representar un objeto tridimensional en un plano.
- Cada *salto* de dimensión añade un grado de libertad, una nueva *dirección* posible para el movimiento.
- La representación en tres dimensiones del hipercubo que construimos en este taller es consecuente con la que se presenta del cubo en dos dimensiones (ver figura 2).

En el inicio del taller se presentan en pantalla varias imágenes que todos los alumnos identifican rápidamente como *cubos.* Al mostrarles un cubo *real,* se les hace ver la extraña situación que se da al llamar de la misma forma a un objeto de tres dimensiones y a unos dibujos de dos dimensiones. Lógicamente, el debate no se alarga demasiado antes de que alguien hable de una representación, o algo similar, en dos dimensiones de un objeto de tres dimensiones. Así, concluimos que lo que realmente vamos a hacer no es construir un hipercubo, sino una representación tres-dimensional de él.

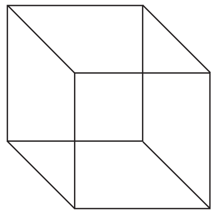

Figura 2

A continuación pasamos a analizar como se puede producir el paso de una dimensión a otra. Para ello utilizamos la sencilla construcción de GeoGebra (preparada por Ricardo Alonso) que podemos ver en el siguiente enlace. En ella, partiendo de un punto, el paso a dimensión uno es que el punto se mueva en una dirección. Ya tenemos un segmento que se convierte en un cuadrado al moverlo en una nueva dirección perpendicular. Pasando a la tercera dimensión, utilizamos dos cuadrados de cartón unidos por *caras* de papel: empezamos con uno encima de otro y los separamos para que *aparezca* el cubo. A partir de ahí, lo que pretendemos es que el alumnado entienda que el hipercubo surgirá al desplazar el cubo en una nueva dirección que, lógicamente, nosotros no podemos observar, al igual que un planilandés no puede ver la dirección *vertical*.

Llega el momento en el que hay que intentar visualizar qué tenemos que construir. Observando la figura 2, resulta que todo el mundo ve un cubo cuando, en realidad, son dos cuadrados, con el vértice de uno de ellos en el centro del otro y uniendo los vértices de ambos cuadrados con aristas. *Subiendo* una dimensión cada uno de estos elementos, nuestra representación consecuente del hipercubo serán dos cubos, con el vértice de uno de ellos en el centro del otro y de tal forma que unimos sus aristas correspondientes mediante caras.

En la última imagen de la figura 1, se ve un cubo; como ese, han de construir dos. Añadimos alguna complejidad. De entrada, les pedimos que encuentren todas las configuraciones posibles distintas de cuadrados que podemos hacer con cuatro colores distintos. Cuando lo comprenden, no es difícil lograr que construyan las tres posibles. Deben hacer dos cuadrados de cada una de las configuraciones. Lo mejor es que construyan un triedro con tres cuadrados *distintos* haciendo coincidir los colores. Luego deben montar el otro triedro *en espejo,* y pegar ambos para formar el primer cubo. El segundo es más rápido, pues solo deben *copiar* el primero, eso sí, teniendo la precaución de montarlo con un vértice en el interior del primero. Ya solo queda unir las doce aristas con otras tantas caras. En la figura 3, se puede ver un hipercubo hecho en la semana matemática del curso 2014-2015 en el IES de Albarracín. En este enlace podemos verlo animado en un fragmento de *Dimensions.*

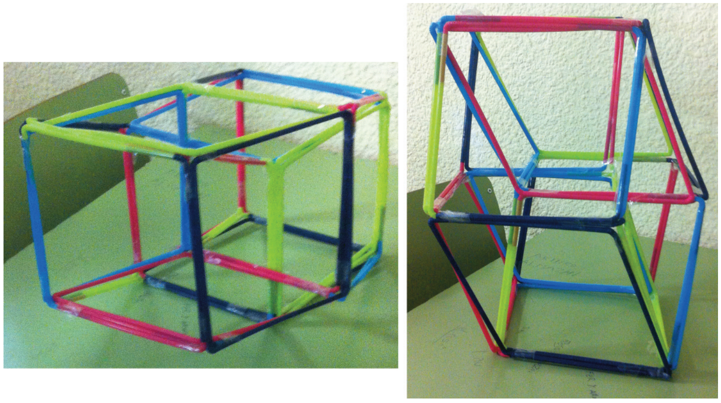

Figura 3

Referencias

ABBOTT, E. (2014), *Planilandia. Una novela de muchas dimensiones,* José J. de Olañeta (editor), Palma de Mallorca.

IBÁÑEZ, R. (2010), *La cuarta dimensión. ¿Es nuestro universo la sombra de otro?,* col. El mundo es matemático, RBA, Barcelona.

RODRÍGUEZ-MOLDES, C., y otros (2007), «Entrando en la cuarta dimensión: construcción de un hipercubo», *Actas de las XIII JAEM*, SAEM Thales, Granada

RUCKER, R. (1987), *La cuarta dimensión,* col. Biblioteca Científica Salvat, Salvat, Barcelona.

www.dimensions-math.org/Dim_ES.htm